

*Řešení úloh náboje podzimního soustředění FYKOSu v
Karlovicích 2018*

Úloha AA ... Ty-144

Těleso vrhneme rychlostí $2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ pod úhlem 30° . Dokážete najít výšku, ve které bude velikost jeho rychlosti poloviční? Inspirováno 1. úlohou Náboje 1999.

Vodorovná složka rychlosti je

$$v_x = v \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} v = \sqrt{3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

takže je větší, než polovina velikosti původní rychlosti. Jelikož vodorovná složka rychlosti se nemění, celková rychlost bude vždy větší, než poloviční. Správnou odpověď tak je *nedokážeme*.

Úloha AB ... Восток

Kousek kovu, který je slitinou mědi a stříbra, má ve vzduchu hmotnost $m = 50 \text{ g}$. Po ponoření do vody bychom na podvodních vahách naměřili hmotnost $m' = 45 \text{ g}$. Jakou část hmotnosti kovu tvoří stříbro? Vzduch považujte za nehmotný. Inspirováno 6. úlohou Náboje 1999.

Kov je "lehčí" o vztlakovou sílu podle rovnice

$$m'g = mg - V \varrho g.$$

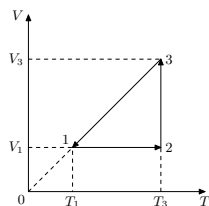
Nechť je hmotností zlomek stříbra w , potom pro objem kovu platí

$$V = V_{\text{Ag}} + V_{\text{Cu}} = \frac{m_{\text{Ag}}}{\varrho_{\text{Ag}}} + \frac{m_{\text{Cu}}}{\varrho_{\text{Cu}}} = \frac{mw}{\varrho_{\text{Ag}}} + \frac{m(1-w)}{\varrho_{\text{Cu}}}.$$

Nyní už máme vše potřebné, abychom si mohli vyjádřit

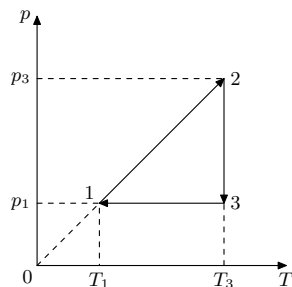
$$w = \frac{1}{\varrho} \left(1 - \frac{m'}{m} - \frac{\varrho}{\varrho_{\text{Cu}}} \right) \left(\frac{1}{\varrho_{\text{Ag}}} - \frac{1}{\varrho_{\text{Cu}}} \right)^{-1}.$$

Úloha AC ... Мир



Na VT diagramu je znázorněn cyklický děj s ideálním plynem. Překreslete tento proces do pT souřadnic a znázorníte odpovídající body 1, 2 a 3. Inspirováno 7. úlohou Náboje 1999.

V procesu $1 \rightarrow 2$ je konstantní objem, tedy se jedná o izochorický děj. Grafem tak bude přímka procházející počátkem, přičemž jak p , tak T budou rostoucí. Procesu $2 \rightarrow 3$ je izotermický, takže tlak klesá při konstantní teplotě. V posledním ději je konstantní tlak a díky klesajícímu objemu musí klesat i teplota.

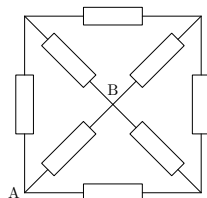


Úloha AD ... IIIII

Osm stejných odporů R je spojených podle následujícího schéma. Určete odpor mezi body A a B . *Inspirováno 9. úlohou Náboje 1999.*

Síť je symetrická podle osy procházející body A a B , takže můžeme protilehlé vrcholy čtverce spojit. Dostaneme tak už docela jednoduchý obvod, odkud už snadno vypočítáme hledaný odpor

$$R_{AB} = \frac{7}{15} R.$$



Úloha AE ... Танк T-34

Za jakou jakou část periody projde těleso, které vykonává harmonické kmity, povinou amplitudy, pokud se na začátku nacházelo v rovnovážné poloze? *Inspirováno 10. úlohou Náboje 1999.*

Graf výchylky harmonického oscilátoru v závislosti na fázi má tvar sinusoidy. Poloviny první amplitudy je dosaženo ve fázi

$$\varphi = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

Celá perioda trvá 2π , takže poloviny amplitudy je dosaženo v čase

$$\frac{T}{12}.$$

Řešením úlohy tak je zlomek $1/12$.

Úloha AF ... Зенит

Řidič měl do města dorazit v jistý čas. Pokud by jel rychlostí $30 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, přijede o dvě hodiny pozdě. Pokud by jel rychlostí $50 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, dorazí zase o hodinu dříve. Jak daleko je řidič od města? *Inspirováno 14. úlohou Náboje 1999.*

Vzdálenost řidiče od města označme x , rychlosti označme po řadě v_1, v_2 . Pro rozdíl časů příjezdů platí

$$\Delta t = \frac{x}{v_1} - \frac{x}{v_2},$$

odkud si můžeme vyjádřit

$$x = \left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} \right)^{-1} \Delta t = 225 \text{ km}.$$

Úloha AG ... Чайка

Jaký je úhel mezi ručičkami na hodinách v 7:38?

Inspirováno 22. úlohou Náboje 1999.

Celý ciferník má 60 minut a 360° , takže minutová ručička je na

$$\frac{38}{60} \cdot 360^\circ = 228^\circ.$$

Ciferník má zároveň i 12 hodin, takže hodinová ručička je na

$$\frac{1}{12} \left(7 + \frac{38}{60} \right) 360^\circ = 229^\circ.$$

Úhel mezi ručičkami je 1° .

Úloha AH ... Сатана

Máme žárovku, která po připojení na napětí $U_1 = 110 \text{ V}$ svítí výkonem $P = 500 \text{ W}$. Jaký odpor k ní musíme sériově připojit, aby po připojení k napětí $U_2 = 230 \text{ V}$ svítila se stejným výkonem?

Inspirováno 2. úlohou Náboje 2000.

Žárovka má odpor

$$R_Z = \frac{U_1^2}{P}.$$

Po připojení odporu R bude soustavou procházet proud

$$I = \frac{U_2}{R_Z + R},$$

přičemž pro výkon žárovky bude platit

$$P = R_Z I^2.$$

Odtud si už snadno vyjádříme

$$R = \frac{U_2}{I} - R_Z = U_2 \sqrt{\frac{R_Z}{P}} - R_Z \doteq 26,4 \Omega.$$

Úloha BA ... Кама

Ploskovypuklá čočka zobrazí obraz z místa 20 cm před ní do místa 40 cm za ní. Jak se zobrazí tento obraz, pokud těsně za ní dáme stejnou, ale opačně orientovanou ploskovypuklou čočku?

Inspirováno 11. úlohou Náboje 2000.

Pro ohniskovou vzdálenost čočky platí

$$\frac{1}{f} = n \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right),$$

přičemž v našem případě je $r_2 = \infty$. Po přidání druhé čočky vznikne čočka s druhým poloměrem $-r_1$, tedy pro její ohniskovou vzdálenost bude platit

$$\frac{1}{f'} = n \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1} \right) = \frac{2}{f}.$$

Nyní si napíšeme zobrazovací rovnice obou čoček

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} &= \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}, \\ \frac{1}{f'} &= \frac{1}{a_1} + \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Jejich porovnáním pomocí vztahu výše už snadno spočítáme

$$x = \left(\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} \right)^{-1} = 10 \text{ cm}.$$

Úloha BB ... Буденовка

V nádobě se nachází led s teplotou $T_0 = 0^\circ\text{C}$. Do nádoby přitéká voda s teplotou T_1 hmotnostním průtokem q_0 . Ven z nádoby vytéká voda s teplotou T_2 . Jaký je hmotnostní průtok vytékající vody?

Inspirováno 26. úlohou Náboje 2000.

Je jasné, že veškerá přitékající voda také odtече. Jelikož se ochladí na teplotu T_2 , dodává tím ledu tepelný výkon

$$P = cq_0 (T_1 - T_2),$$

kde c je měrná tepelná kapacita vody. Toto teplo se používá na tavení ledu a ohřev vznikající vody. Nechť je hmotnostní průtok této vody q_1 , potom platí

$$P = l_t q_1 + cq_1 (T_2 - T_0),$$

kde l_t je měrné skupenské teplo tání ledu a T_0 je teplota tání ledu. Nyní si jen stačí z těchto rovnic vyjádřit q_1 . Výsledný průtok vody pak je

$$q = q_0 + q_1 = q_0 \left(\frac{l_t + c(T_1 - T_0)}{l_t + c(T_2 - T_0)} \right).$$

Úloha BC ... Горбатый

Jak hluboká by musela být propast, abychom tón řevu náhodné oběti těsně před dopadem na dno slyšeli s poloviční frekvencí, než na začátku pádu? Zanedbejte odpor vzduchu.

Inspirováno 24. úlohou Náboje 1999.

Pozorovaná frekvence pohybujícího se zdroje je

$$f = f_0 \frac{v}{v + c}.$$

Rychlost volného pádu je

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Celkově tak máme

$$h = \frac{c^2}{2g} \frac{f^2}{(f_0 - f)^2} = \frac{c^2}{2g} \doteq 6 \text{ km}.$$

Úloha BD ... Мыравей

Dvě kuličky s ne nutně stejnými hmotnostmi visí těsně vedle sebe na dvou nitích stejné délky. První kuličku vykloníme tak, že bude 0,2 m nad úroveň té druhé a pustíme jí. Kuličky se pružně srazí a následně vystoupají do stejné výšky. Do jaké přesně?

Inspirováno 19. úlohou Náboje 2000.

Hmotnost první kuličky označme m_1 , hmotnost druhé kuličky bude m_2 . Obě kuličky vystoupají do stejné výšky, tedy těsně po srážce musí mít stejnou rychlost, označme jí v . Zákon zachování energie má tvar

$$m_1 g h_0 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 = (m_1 + m_2) g h,$$

kde h_0 je počáteční výška první kuličky a h je hledaná konečná výška obou kuliček. Ze zákona zachování hybnosti máme

$$m_1 v_1 = m_2 v - m_1 v,$$

kde pro rychlost první kuličky těsně před srážkou platí

$$v_1 = \sqrt{2gh_0}.$$

Odtud si vyjádříme

$$m_2 = \frac{v + v_1}{v} m_1.$$

Dosazením do zákona zachování energie dostáváme kvadratickou rovnici

$$2v^2 + v_1 v - 2gh_0 = 0,$$

jejímž řešením je

$$v = \frac{-v_1 + \sqrt{v_1^2 + 16gh_0}}{4} = \frac{-\sqrt{2gh_0} + \sqrt{2gh_0 + 16gh_0}}{4} = \sqrt{\frac{gh_0}{2}} = \frac{v_1}{2}.$$

Nyní už můžeme dosadit za všechny neznámé do první rovnice a dostáváme

$$h = h_0 \frac{v}{2v + v_1} = \frac{h_0}{4} = 5 \text{ cm}.$$

Úloha BE ... Двухэтажный троллейбус ЯТБ-3

Napište v rozsahu alespoň stránky A5 jaká je vaše nejoblíbenější historická osobnost a proč právě Lenin. *Jáchym chtěl, aby byl počet úloh mocninou dvojky.*

Správným řešením je libovolný srozumitelný text v rozstahu alespoň stránky A5, dostatečně oslavující Lenina.

Úloha BF ... Экраноплан

Jáchym s Matějem jedou proti sobě na kolech. Jejich počáteční vzdálenost je 100 km, Jáchym jede rychlostí $30 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ a Matěj jede rychlostí $20 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Mezi nimi neustále tam a zpět létá pták Fykosák. Po větru (směrem k Matějovi) se pohybuje rychlostí $55 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, proti větru $45 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Jakou vzdálenost Fykosák urazí, než se oba cyklisti srazí? Začíná u Jáchyma.

Inspirováno 17. úlohou Náboje 1999.

Označme rychlosti po řadě jak vystupují v zadání v_1 , v_2 , u_1 , u_2 . Počáteční vzdálenost je x . Fykosák k Matějovi doletí za čas

$$t_1 = \frac{x}{u_1 + v_2},$$

přičemž vzdálenost cyklistů se za tu dobu změní na

$$x_1 = x - t_1(v_1 + v_2).$$

Cesta zpět za Jáchymem bude trvat čas

$$t_2 = \frac{x_1}{u_2 + v_1}.$$

Nyní si jen stačí uvědomit, že poměr časů t_1 a t_2 nezávisí na původní vzdálenosti x , a tedy bude stejný pro každý "cyklus". Necht T_1 , T_2 jsou časy, které Fykosák nalétá směrem po a proti větru za celou dobu, potom máme rovnice

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{t_1}{t_2} = \frac{u_2 + v_1}{u_1 - v_1},$$

$$T_1 + T_2 = \frac{x}{v_1 + v_2}.$$

Řešením této soustavy dvou rovnic o dvou neznámých zjistíme časy T_1 a T_2 . Posledním krokem je výpočet celkové vzdálenosti, kterou Fykosák urazí

$$y = u_1 T_1 + u_2 T_2 = 105 \text{ km}.$$

Úloha BG ... Ну погоди!

Ve vrcholech pravidelného šestiúhelníka jsou umístěny stejné náboje Q . Jaký náboj musíme dát do středu obrazce, aby byla soustava v rovnováze? *Inspirováno 20. úlohou Náboje 2000.*

Délku hrany šestiúhelníka označme a . Na libovolný náboj působí 5 dalších nábojů ve vrcholech a jeden náboj q ve středu. Označme si vrcholy proti směru hodinových ručiček čísla od jedné do šesti, potom na náboj ve vrcholu 1 působí celkem 4 skupiny sil.

Síly od nábojů 2 a 6 – jejich výslednice má velikost

$$F_1 = \frac{2}{4\pi\epsilon} \frac{Q^2}{a^2} \cos 60^\circ = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q^2}{a^2}.$$

Síly od nábojů 3 a 5 se sečtou na

$$F_2 = \frac{2}{4\pi\epsilon} \frac{Q^2}{(2a \cos 30^\circ)^2} \cos 30^\circ = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q^2}{\sqrt{3}a^2}.$$

Síla od náboje 4 bude

$$F_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q^2}{(2a)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q^2}{4a^2}.$$

Pro sílu od náboje ve středu platí

$$F_4 = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Qq}{a^2}.$$

Vektory všech těchto sil jsou rovnoběžné, takže pro rovnováhu bodu 1 platí

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 0,$$

odkud po dosazení dostáváme

$$q = -\left(\frac{5}{4} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) Q.$$

Úloha BH ... Значки

Určete tlak slunečního záření na solární panel družice na oběžné dráze Země, pokud je dopadající tok energie $\Phi = 1400 \text{ J} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$, panel je natočen kolmo na směr záření a 75 % z něj se odrazí zpět. *Inspirováno 25. úlohou Náboje 1999.*

Na panel za čas t dopadne energie

$$E = \Phi St.$$

Energie fotonu s hybností p je $E = pc$. Díky tomu si můžeme vyjádřit celkovou hybnost dopadajících částic jako

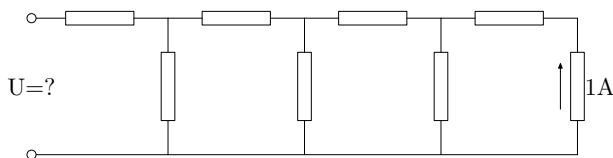
$$p = \frac{E}{c} = \frac{\Phi St}{c}.$$

Nyní si jen stačí uvědomit, že $k = 75\%$ z dopadajících fotonů se odrazí, takže se jejich hybnost do celkové změny hybnosti započítá dvakrát. Celkově tak pro tlak záření vychází

$$P = \frac{F}{S} = \frac{\Delta p}{St} = \frac{(1+k)\Phi}{c} \doteq 8,17 \cdot 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}.$$

Úloha CA ... Неваляшка

Každý z rezistorů na obrázku má odpor 1Ω . Přes odpor nejvíce vpravo protéká proud 1 A . Jaké je napětí na výstupu obvodu?

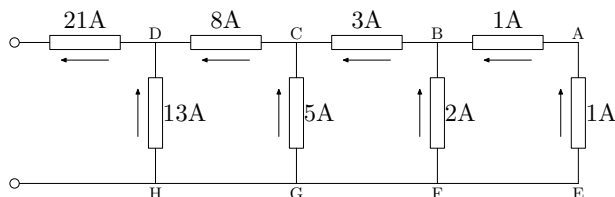


Inspirováno 32. úlohou Náboje 1999.

Stejný proud, který teče odporem mezi body A a E, zřejmě teče i odporem mezi A a B. Napětí na odporu mezi body B a F tak musí být 2 V a proto tímto rezistorem poteče proud 2 A .

Celkový proud tekoucí oběma zmíněnými větvemi se spojí a tak mezi B a C potečou 3 A . Tomu odpovídá napětí 3 V , odkud si už spočítáme napětí a proud mezi C a G.

Nyní už je docela zřejmé, že proudy a napětí na jednotlivých rezistorech se zvyšují podle Fibonacciho posloupnosti. Napětí mezi výstupy celého obvodu tak bude 34 V .



Úloha CB ... Аккумулятор

Mějme dvě koule o hmotnosti m z materiálu s délkovou tepelnou roztažností λ . Jedna leží na podložce, druhá je zavěšená na niti. Obě mají poloměr R , tepelnou kapacitu C a teplotu T . Oběma dodáme teplo Q . Jaký bude potom rozdíl jejich teplot?

Inspirováno 30. úlohou Náboje 1999.

V obou případech se dodané teplo spotřebuje nejen na změnu vnitřní energie, ale i na změnu potenciální energie. Těžiště ležící koule se při zahřívání zvedne, zatímco těžiště zavěšené koule klesne. Zákon zachování energie bude ve tvaru

$$Q = C(T_{1,2} - T) + mg\Delta h_{1,2}.$$

Jednotlivé změny polohy těžiště spočítáme jako

$$\begin{aligned}\Delta h_1 &= R(1 + \lambda(T_1 - T)) - R = R\lambda(T_1 - T), \\ \Delta h_2 &= R - R(1 + \lambda(T_2 - T)) = -R\lambda(T_2 - T).\end{aligned}$$

Z těchto rovnic si už snadno vyjádříme výsledné teploty

$$\begin{aligned}T_1 &= T + \frac{Q}{(C + mgR\lambda)}, \\ T_2 &= T + \frac{Q}{(C - mgR\lambda)}.\end{aligned}$$

Hledaný rozdíl pak bude

$$T_2 - T_1 = Q \left(\frac{1}{C - mgR\lambda} - \frac{1}{C + mgR\lambda} \right) = \frac{2mgR\lambda Q}{C^2 - m^2g^2R^2\lambda^2}.$$

Úloha CC ... Урал

Homogenní toaletní papír s délkovou hustotou λ je nejdříve smotaný do ruličky. Poté mu dodáme zanedbatelný impuls a on se začne odvíjet. Jaká bude úhlová rychlost točící se role po odmotání délky x ? Počáteční poloměr role je R , celková hmotnost papíru je m , vnitřní prázdnou ruličku neuvažujte.

Inspirováno 8. úlohou Náboje 2000.

Těžiště odmotaného úseku bude ve výšce $\frac{x}{2}$ pod zbytkem papíru, hmotnost úseku bude λx . Pokles potenciální energie

$$E_p = \frac{\lambda x^2 g}{2}$$

způsobí přírůstek kinetické energie, kterou spočítáme jako

$$E_k = \frac{1}{2}\lambda x v^2 + \frac{1}{2}J\omega^2,$$

kde pro moment setrvačnosti role platí

$$J = \frac{1}{2}(m - \lambda x)r^2,$$

kde poloměr role určíme jako

$$r = R \sqrt{\frac{m - \lambda x}{m}}.$$

Dále pro rychlost papíru platí

$$v = \omega r.$$

Nyní vše dosadíme do první rovnice, odkud si již snadno vyjádříme

$$\omega = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{2m\lambda x^2 g}{m^2 - \lambda^2 x^2}}.$$

Úloha CD ... Граненый стакан

S jakým minimálním zrychlením a se má pohybovat vozík, aby se tělesa stejné hmotnosti m vůči němu nehýbala? Koeficient tření mezi tělesy a vozíkem je f .

Inspirováno 11. úlohou Náboje 1999.

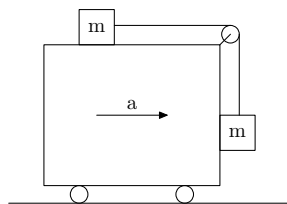
Pokud by zrychlení bylo nulové, boční těleso by mělo tendenci pohybovat se směrem dolů. Při nějakém zrychlení se tak vytvoří třecí síly, působící proti tomuto pohybu. Řešíme krajní případ, tedy tyto síly budou maximální možné.

Na boční těleso působí ve svislém směru tíhová síla $-mg$, síla od lana F a třecí síla fma . Jejich výslednice je nulová. Naopak na horní těleso působí ve vodorovném směru síla od lana F a třecí síla $-fmg$, jejichž výslednicí je ma . Máme tak rovnice

$$\begin{aligned} F - mg + fma &= 0, \\ F - fmg &= ma. \end{aligned}$$

Z první rovnice si do druhé dosadíme za F a vyjádříme si

$$a = g \frac{1 - f}{1 + f}.$$



Úloha CE ... Вихрь

Mějme 50 % roztok lihu (v hmotnostních procentech) s hmotností $M = 666 \text{ g}$ a počáteční teplotou $T = 32^\circ \text{C}$. Pokud jej dáme na vařič s výkonem $P = 999 \text{ W}$, za jak dlouho se voda začne vařit? Měrná tepelná kapacita lihu je $c_l = 2,4 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, měrné skupenské teplo varu lihu je $l_1 = 840 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ a teplota varu lihu je $T_1 = 351,5 \text{ K}$.

Inspirováno 34. úlohou Náboje 1999.

Nejdříve se roztok ohřeje na teplotu varu lihu T_1 . Následně se líh vypaří a roztok se začne znovu ohřívat, a to až na teplotu varu vody T_v . Celkové teplo, které roztoku musíme dodat, bude

$$Q = \frac{M}{2} (c_l (T_1 - T) + l_1 + c_v (T_v - T)),$$

kde c je měrná tepelná kapacita a l je měrné skupenské teplo varu. Čas už spočítáme snadno

$$t = \frac{Q}{P} = \frac{M}{2P} (c_l (T_l - T) + l + c_v (T_v - T)) \doteq 412 \text{ s}.$$

Úloha CF ... Аппараты газводы

Fontána stříká vodu do vzdálenosti x , přičemž nejvyšší bod trajektorie leží ve výšce y . Ve vzduchu je vždy naráz hmotnost m vody. Jaký je výkon čerpadla fontány?

Inspirováno 36. úlohou Náboje 1999.

Jednotlivé složky rychlosti označme v_x a v_y , čas letu každé kapky vody bude $2t$. Zřejmě platí

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{2y}{g}}, \\ v_y &= gt, \\ v_x &= \frac{x}{2t}. \end{aligned}$$

Hmotnostní tok vody je

$$q = \frac{m}{2t}.$$

Pro výkon čerpadla tak dostáváme

$$P = \frac{1}{2} q (v_x^2 + v_y^2) = \frac{mg}{2} \sqrt{\frac{g}{2y}} \left(\frac{x^2}{16y} + y \right).$$

Úloha CG ... Спутник

Z povrchu planety o poloměru R startuje svisle vzhůru raketa první kosmickou rychlostí. Do jaké maximální výšky h od povrchu planety vystoupá? Odpor vzduchu neuvažujte.

Inspirováno 3. úlohou Náboje 1999.

Vzorec pro první kosmickou rychlost je

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}},$$

kde M je hmotnost planety a R je její poloměr. Potenciální energie tělesa s hmotností m v centrálním gravitačním poli má tvar

$$E(x) = -\frac{GmM}{x},$$

kde x je vzdálenost od středu planety. Nyní jen stačí dát do rovnosti kinetickou energii tělesa s rozdílem potenciální energie

$$\frac{1}{2}mv^2 = E(h) - E(R) = \frac{GmM}{R} - \frac{GmM}{h},$$

odkud už si snadno vyjádříme

$$h = \left(\frac{1}{R} - \frac{v^2}{2GM} \right)^{-1},$$

$$h = 2R.$$

Raketa se dostane do vzdálenosti $2R$ od středu planety, čili vystoupá do výšky R .

Úloha CH ... AK-47

Částice 1 se pružně srazí s do té doby se nepohybující částicí 2. Po srážce budou vektory rychlostí obou částic odkloněny o úhel α od původního vektoru rychlosti. Určete poměr hmotností částic m_1/m_2 . *Inspirováno 5. úlohou Náboje 1999.*

Původní rychlost pohybující se částice označme v , rychlosti částic po srážce budou u . Platí zákon zachování hybnosti v obou osách

$$m_1 v = m_1 v_1 \cos \alpha + m_2 v_2 \cos \alpha,$$

$$0 = m_1 v_1 \sin \alpha - m_2 v_2 \sin \alpha.$$

Z druhé rovnice vidíme, že

$$v_2 = \frac{m_1}{m_2} v_1.$$

Dosazením do první rovnice dostáváme

$$v = 2v_1 \cos \alpha.$$

Dále máme k dispozici zákon zachování energie ve tvaru

$$\frac{1}{2} m_1 v^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2.$$

Po dosazení za v a v_2 ze vztahů výše si už snadno vyjádříme

$$\frac{m_1}{m_2} = 4 \cos^2 \alpha - 1.$$

Úloha DA ... Кирзовые сапоги

Jakou maximální délku může mít tyč, která se udrží zaseknutá mezi stěnami svislé jámy, které jsou od sebe vzdálené d ? Koeficient tření mezi tyčí a stěnami je f .

Inspirováno 32. úlohou Náboje 2000.

Označme síly, kterými tyč působí na stěny (a stěny působí na tyč) jako F . Jelikož jsou kolmé na stěny, způsobují třecí síly F_1 a F_2 , pro které platí

$$F_1, F_2 \leq fF.$$

Nechť například síla F_1 působí na nižší konec tyče, síla F_2 naopak působí na vyšší konec tyče. Na tyč ještě působí tíhová síla $F_g = mg$, pro kterou platí

$$F_g = F_1 + F_2.$$

Pokud délku tyče označíme l a její sklon od vodorovného směru označíme α , z podmínky nulového momentu sil vůči jejímu dolnímu konci vyplývá

$$Fl \sin \alpha + F_2 l \cos \alpha - \frac{1}{2} F_g l \cos \alpha = 0.$$

Po dosazení

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\left(\frac{l}{d}\right)^2 - 1}$$

dostáváme

$$F_2 = \frac{1}{2} F_g - F \sqrt{\left(\frac{l}{d}\right)^2 - 1},$$

$$F_1 = \frac{1}{2} F_g + F \sqrt{\left(\frac{l}{d}\right)^2 - 1}.$$

Jelikož $F_2 < F_1$, zřejmě nám stačí splnit podmínku $F_1 \leq fF$. V mezním případě platí rovnost, neboli

$$fF = \frac{1}{2} F_g + F \sqrt{\left(\frac{l}{d}\right)^2 - 1},$$

$$F = \frac{F_g}{2 \left(f - \sqrt{\left(\frac{l}{d}\right)^2 - 1} \right)}.$$

Tato síla musí být kladná, odkud plyne

$$l = d \sqrt{f^2 + 1}.$$

Úloha DB ... Копейка

Dva červi se stejnou hmotností lezou přes 10 cm vysokou velmi tenkou stěnu. První je dlouhý 20 cm, druhý měří 10 cm. Jaký je poměr mezi prací, kterou při přelézání stěny vykoná delší červ, a prací, kterou vykoná kratší červ?

Inspirováno 27. úlohou Náboje 1999.

Klíčem k řešení úlohy je uvědomit si, že červ koná práci tehdy, když zvyšuje své těžiště. Při přelézání stěny je těžiště nejdříve v nulové výšce, potom se zvedá až do bodu kde začne klesat a odtud klesne zpět na nulu. Celková práce vykonaná červem tak bude rovna rozdílu potenciální energie mezi minimem a maximem.

Označme výšku stěny h a délky červů l_1 a l_2 . Potom za předpokladu $l \geq 2h$ pro maximální výšku těžiště červa platí

$$y = h - \frac{l}{4}.$$

Hmotnost obou červů je stejná, takže pro poměr prací platí

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{4h - l_1}{4h - l_2} = \frac{2}{3}.$$

Úloha DC ... Белаз

Vzdálenost mezi zdrojem světla a stínidlem je l . Pokud mezi nimi pohybujeme čočkou, získáme dva ostré obrazy, přičemž poměr jejich velikostí je $1 : 9$. Jaká je ohnisková vzdálenost této čočky?
Inspirováno 28. úlohou Náboje 1999.

Nechť je vzdálenost čočky od zdroje x . Napišeme si zobrazovací rovnici ve tvaru

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{l - x}.$$

Roznásobením dostaneme kvadratickou rovnici

$$x^2 - lx + lf = 0,$$

jejímž řešením je

$$x_{1,2} = \frac{l \pm \sqrt{l^2 - 4lf}}{2},$$

kde x_1 je kořen s $+$. Zvětšení čočky je definováno jako

$$Z = \frac{l - x}{x}.$$

Vzhledem k tomu, že $x_1 > x_2$, musí být $Z_1 < Z_2$. Zároveň víme, že poměr zvětšení je $1 : 9$, takže platí

$$9Z_1 = Z_2.$$

Po dosazení ze vztahů výše a několika algebraických úpravách máme výsledek

$$f = \frac{3}{16}l.$$

Úloha DD ... Планета

Mezi dvěma rovnoběžnými skleněnými deskami je kapka vody. Vzdálenost desek je d , průměr vodní skvrny je D , přičemž $D \gg d$. Určete velikost síly, která k sobě přitahuje tyto dvě skleněné desky.
Inspirováno 29. úlohou Náboje 1999.

Stěny skvrny budou vyduté dovnitř, přičemž poloměr tohoto zakřivení bude

$$R = \frac{1}{2}d.$$

To způsobí pokles tlaku uvnitř kapky o

$$\Delta p = \frac{\sigma}{R} = \frac{2\sigma}{d}.$$

Síla přitahující desky je pak rovna součinu tohoto tlaku a plochy, na kterou působí

$$F = \frac{\pi D}{4} \Delta p = \frac{\pi \sigma D^2}{2d}.$$

Úloha DE ... Мереоп

Na kolik kapek musíme rozprsknout vodu s hmotností m a teplotou T_1 , aby jejich výsledná teplota snížila na T_2 ? *Inspirováno 31. úlohou Náboje 1999.*

Vnitřní energie vody se přemění na její povrchovou energii. Označme hledaný počet kapek N . Každá z nich bude mít poloměr R , který dokážeme určit ze zákona zachování vody

$$R = \left(\frac{3m}{4\pi \rho N} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Počáteční povrchovou energii vody můžeme zanedbat. Voda pak získá povrchovou energii

$$E = \sigma S = 4\pi \sigma R^2,$$

kteřou dáme do rovnosti s úbytkem vnitřní energie

$$E = mc(T_1 - T_2).$$

Z výsledné rovnice si už snadno vyjádříme

$$N = \frac{\rho^2 mc^3 (T_1 - T_2)^3}{36\pi \sigma^3}.$$

Úloha DF ... Авоська

Pohyblivý píst se zanedbatelnou hmotností rozděluje svislý válec s průřezem S na dvě stejné části. V každé z nich je jeden mol ideálního plynu. Na píst zavěsíme závaží s tíhou G . Jaký bude tlak v dolní části nádoby, až se situace ustálí? Nádoba si může vyměňovat teplo s okolím. Počáteční tlak v nádobě je p . *Inspirováno 33. úlohou Náboje 1999.*

Nechť je teplota okolí T , výška válce $2l$ a píst klesne o vzdálenost x . Tlaky v horní a dolní části nádoby označme po řadě p_1 a p_2 . Z podmínky mechanické rovnováhy vyplývá

$$p_1 S = p_2 S + G.$$

Dále si můžeme pomoci stavové rovnice vyjádřit

$$p_1 = \frac{nRT}{S(l-x)},$$

$$p_2 = \frac{nRT}{S(l+x)}.$$

Dosazením do prvního vztahu dostáváme kvadratickou rovnici

$$Gx^2 + 2nRTx - Gl^2 = 0,$$

u které hledáme kladné řešení

$$x = \frac{-nRT + \sqrt{n^2 R^2 T^2 + G^2 l^2}}{G}.$$

Tento výsledek dosadíme do vztahu pro výpočet p_1 výše. Zbýlých neznámých se zbavíme rovnicí

$$p = \frac{nRT}{Sl}.$$

Pro tlak ve spodní části nádoby tak dostáváme

$$p_1 = \frac{Gp}{G + pS - \sqrt{p^2 S^2 + G^2}}.$$

Úloha DG ... Электрички рижские

Kvadr o hmotnost M s délkou l se pohybuje proti stěně rychlostí v . Jaká je maximální hodnota této rychlosti, aby malé těleso s hmotností m , položené na zadním okraji horní podstavky kvádru, nespadlo po srážce kvádru se stěnou? Koeficient tření mezi kvádrem a tělesem je f , kvadr se od stěny odrazí pružně. *Inspirováno 35. úlohou Náboje 2000.*

Po srážce se kvadr bude pohybovat rychlostí v , pouze opačným směrem. Rychlost tělesa se v okamžiku srážky nezmění, ale poté bude klesat v důsledku třecí síly. Můžeme pro ní sestavit rovnici

$$v_t(t) = -v + fgt.$$

Kvadr bude také zpomalovat v důsledku třecí síly, pro jeho rychlost tak platí

$$v_k(t) = v - f \frac{mg}{M} t.$$

Rychlosti se vyrovnají v čase

$$\tau = \frac{2v}{fg} \left(\frac{m}{M} + 1 \right)^{-1}.$$

během kterého tělesa urazí vzájemnou vzdálenost

$$x = \int_0^\tau (v_k - v_t) dt = 2v\tau - \frac{1}{2}fg \left(\frac{m}{M} + 1 \right) \tau^2 = \frac{2v^2}{fg} \left(\frac{m}{M} + 1 \right)^{-1}.$$

Ta musí být rovna délce kvádrů

$$l = x_1 + x_2.$$

Odtud si už můžeme vyjádřit výsledek

$$v = \sqrt{\frac{f g l \left(\frac{m}{M} + 1 \right)}{2}}.$$

Úloha DH ... Луноход

Částice o hmotnosti m_1 narazí na do té doby se nepohybující částici s hmotností m_2 , přičemž platí $m_1 > m_2$. Určete o jaký maximální úhel se může první částice odklonit od svého původního směru. *Inspirováno 4. úlohou Náboje 1999.*

Původní rychlost pohybující se částice označme v , rychlosti částic po srážce budou v_1 a v_2 . Pohybující se částice se od svého původního směru odkloní o úhel α . Druhá částice se od tohoto směru odkloní o úhel β na druhou stranu. Platí zákon zachování hybnosti v obou osách

$$\begin{aligned} m_1 v &= m_1 v_1 \cos \alpha + m_2 v_2 \cos \beta, \\ 0 &= m_1 v_1 \sin \alpha - m_2 v_2 \sin \beta. \end{aligned}$$

Z druhé rovnice si vyjádříme

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \frac{m_1^2 v_1^2}{m_2^2 v_2^2} \sin^2 \alpha}.$$

Do první rovnice dosadíme za $\cos \beta$ a dostaneme

$$m_1 v = m_1 v_1 \cos \alpha + \sqrt{m_2^2 v_2^2 - m_1^2 v_1^2 \sin^2 \alpha}.$$

Nyní se zbavíme odmocniny tak, že jí osamostatníme a celou rovnici umocníme na druhou. Dále využijeme identitu $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ a máme

$$m_1^2 v^2 - 2m_1^2 v v_1 \cos \alpha + m_1^2 v_1^2 = m_2^2 v_2^2.$$

Platí zákon zachování energie ve tvaru

$$\frac{1}{2} m_1 v^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2,$$

ze kterého si vyjádříme v_2^2 a dosadíme do předchozí rovnice. Nakonec dostáváme kvadratickou rovnici pro v_1

$$(m_1 + m_2) v_1^2 - 2m_1 v v_1 \cos \alpha + (m_1 - m_2) v^2 = 0.$$

Aby bylo v_1 reálné, musí být diskriminant rovnice větší roven nule. Z této podmínky vyplývá

$$\sin \alpha \geq \frac{m_2}{m_1}$$

a tedy maximální dosažitelný úhel je

$$\alpha = \arcsin \frac{m_2}{m_1}.$$